Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Petar Stipanović

2015/16

Sažetak

Diferencijalne jednadžbe prirodno se javljaju kao modeli koji opisuju ponašanje različitih sustava (fizikanih, bioloških, ekonomskih...) pa je ključno poznavanje matematičkog alata kako bismo razumjeli ponašanje tih sustava. Stoga je u tekstu koji slijedi iznešen vrlo kratki uvod u obične linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, a koje su ključne za rješavanje problema vezanih uz titranje.

1 Rješenja diferencijalnih jednadžbi

Za razliku od algebarskih jednadžbi, koje opisuju vezu među varijablama, **diferencijalne jednadžbe** opisuju vezu neke funkcije $x(t)$ i njenih derivacija $x^{(n)}(t)$

$$F\left(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n)}\right) = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

pa je rješenje takve jednadžbe na intervalu I svaka realna (ili kompleksna) dovoljno glatka funkcija $x : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ čijim uvrštavanjem u jednadžbu (1) dobivamo istinitu jednakost za svaku vrijednost varijable $t \in I$. U fizici je ta **nepoznata funkcija** najčešće neka vremenski ovisna veličina $x(t)$. **Red** n diferencijalne jednadžbe određen je redom najviše derivacije nepoznate funkcije $x^{(n)}$ koja se pojavljuje u njoj. Oblik od (1) u kojem je ona razriješena po n-toj derivaciji

$$x^{(n)} = f\left(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

nazivamo njenim kanonskim oblikom. Osnovna tehnika rješavanja diferencijalnih jednadžbi jest integriranje. Rješenje, odnosno n-parametarska familija funkcija

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, \cdots, C_n) \tag{3}$$

ili

$$\Phi(t, x, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0 \tag{4}$$

koja sadrži n proizvoljnih konstanti C_i i koja identično zadovoljava (1) i (2) naziva se **opće rješenje** ili opći integral. **Partikularno** je **rješenje** ono rješenje koje se dobiva iz općega specijalnim izborom konstanti $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Konstante $C_1, C_2, \cdots, C_n$ često određujemo iz početnih uvjeta koji nam daju vrijednosti nepoznate funkcije i njenih derivacija u $t = 0$. Rješenja koja se ne mogu dobiti iz općeg ni za jedna izbor konstanti nazivaju se **singularna**.
Ako se u (1) varijabla t pojavljuje samo kao argument funkcije $x(t)$ i njenih derivacija, kažemo da je jednadžba **homogena**. Ako se funkcija $x(t)$ i njene derivacije pojavljuju kao prve potencije, kažemo da je diferencijalna jednadžba **linearna**.

2 Homogna linearna diferencijalna jednadžba

Homogena linearna diferencijalna jednadžba n-tog reda s konstantnim koeficijentima $a_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$ glasi

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0\ . \tag{5}$$

Opće rješenje od (5) možemo zapisati u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} C_i x^i \tag{6}$$

gdje su C_i proizvoljne konstante te x^i linearno nezavisna partikularna rješenja koja određujemo prema rješenjima (korijenima) $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ karakteristične jednadžbe

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\ . \tag{7}$$

U ovisnosti o prirodi rješenja λ_i uzimamo različite oblike za partikularna rješenja x^i:

(H1) za relani λ_i kratnosti 1

$$x^i = \exp(\lambda_i t) \tag{8}$$

(H2) za relani λ_i kratnosti p

$$x_1^i = \exp(\lambda_i t) \tag{9}$$
$$x_2^i = t \exp(\lambda_i t) \tag{10}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_p^i = t^{p-1} \exp(\lambda_i t) \tag{11}$$

(H3) za konjugirano kompleksni par ($\lambda_i = \alpha + \beta\mathbb{I}$, $\bar{\lambda}_i = \alpha - \beta\mathbb{I}$) kratnosti 1

$$x_1^i = \exp(\alpha t)\cos(\beta t) \tag{12}$$
$$x_2^i = \exp(\alpha t)\sin(\beta t) \tag{13}$$

(H4) za konjugirano kompleksni par ($\lambda_i = \alpha + \beta\mathbb{I}$, $\bar{\lambda}_i = \alpha - \beta\mathbb{I}$) kratnosti s

$$x_1^i = \exp(\alpha t)\cos(\beta t) \tag{14}$$
$$x_2^i = t\exp(\alpha t)\cos(\beta t) \tag{15}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_s^i = t^{s-1}\exp(\alpha t)\cos(\beta t) \tag{16}$$
$$x_{s+1}^i = \exp(\alpha t)\sin(\beta t) \tag{17}$$
$$x_{s+2}^i = t\exp(\alpha t)\sin(\beta t) \tag{18}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_{2s}^i = t^{s-1}\exp(\alpha t)\sin(\beta t) \tag{19}$$

3 Nehomogna linearna diferencijalna jednadžba

Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba n-tog reda s konstantnim koeficijentima $a_i \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0$ glasi

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = f(t)\ . \tag{20}$$

Opće rješenje od (20)

$$x = x_{\mathrm{H}} + x_{\mathrm{P}} \tag{21}$$

možemo zapisati kao zbroj općeg rješenja x_{H} (6) pridružene homogene jednadžbe (5) i nekog partikularnog rješenja x_{P} dane nehomogene jednadžbe (20). Ako je

$$f(t) = \exp(\alpha t)\left[P_n(t)\cos(\beta t) + Q_m(t)\sin(\beta t)\right] \tag{22}$$

onda x_{P} možemo naći metodom neodređenih koeficijenata pretpostavljajući ga u obliku

$$x_{\mathrm{P}} = t^s \exp(\alpha t)\left[T_k(t)\cos(\beta t) + R_k(t)\sin(\beta t)\right] \tag{23}$$

gdje su P, Q, R, T polinomi naznačenog stupnja (n, m, k, k) s tim da je $k = \max(m, n)$. Za s uzimamo kratnost korijena $\lambda = \alpha \pm \beta i$ karakteristične jednadžbe (7), odnosno $s = 0$ ako $\alpha \pm \beta i$ nije korijen karakteristične jednadžbe. Ako je

$$f(t) = \sum_{i=1}^{l} b_i f_i(t) \tag{24}$$

koristimo princip superpozicije za pronalaženje partikularnog rješenja

$$x_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{l} b_i x_{\mathrm{P}_i} \tag{25}$$

gdje je x_{P_i} partikularno rješenje jednadžbe

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = f_i(t),\ i = 1, \cdots, l\ . \tag{26}$$

4 Primjeri diferencijalnih jednadžbi često korištenih na vježbama iz OF3

U tekstu koji slijedi koriste se standardne oznake kao na vježbama iz Opće fizike 3 (OF3) te se objašnjava postupak dobivanja rješenja kojih u problemskim zadacima inače odmah pišemo kada dobijemo diferencijalnu jednadžbu određenog tip, dakle bez rješavanja njene karakteristične jednadžbe.

4.1 Jednostavni harmonijski oscilator

Diferencijalna jednadžba, koja opisuje gibanje linearnog harmonijskog oscilatora,

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x(t)} \tag{27}$$

obična je homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda (5)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x(t) = 0 \tag{28}$$

čija je karakteristična jednadžba (7)

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \; . \tag{29}$$

Rješenja te karakteristične jednadžbe

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 \mathbb{I} \tag{30}$$

oblika su (H3) gdje je $\alpha = 0$ i $\beta = \omega_0$ pa opće rješenje (6) pišemo kao općenitu linearnu kombinaciju partikularnih rješenja (12) i (13)

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \tag{31}$$

što možemo radi jednostavnosti zapisati i kao

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)} \; . \tag{32}$$

Naime, određeno rješenje dobivamo primjenom početnih uvjeta pomoću kojih određujemo konstante C_1 i C_2 u (31), odnosno amplitudu oscilacija A i početnu fazu φ u (32). Međutim, iz jednakosti rješenja (32) i (31)

$$C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{33}$$

$$C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) - A\sin(\omega_0 t)\sin(\varphi) \tag{34}$$

slijedi jedinstvena veza parova tih konstanti

$$C_1 = A\cos(\varphi) \tag{35}$$

$$C_2 = -A\sin(\varphi) \tag{36}$$

pa ćemo radi jednostavnosti, kada dobijemo diferencijalnu jednadžbu (27), njeno rješenje pisati u obliku (32).

4.2 Prigušeni harmonijski oscilator

Diferencijalna jednadžba, koja opisuje gibanje prigušenog harmonijskog oscilatora,

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -2\delta\frac{dx(t)}{dt} - \omega_0^2x(t)} \tag{37}$$

obična je homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda (5)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\delta\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2x(t) = 0 \tag{38}$$

čija je karakteristična jednadžba (7)

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \ . \tag{39}$$

Rješenja te karakteristične jednadžbe

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\mathbb{I} \equiv -\delta \pm \omega'\mathbb{I} \tag{40}$$

oblika su (H3) gdje je $\alpha = -\delta$ i $\beta = -\omega'$ pa opće rješenje (6) pišemo kao općenitu linearnu kombinaciju partikularnih rješenja (12) i (13)

$$x(t) = C_1e^{-\delta t}\cos(\omega' t) + C_2e^{-\delta t}\sin(\omega' t) \tag{41}$$

što možemo kao (32) radi jednostavnosti zapisati u obliku

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega' t + \varphi)} \ . \tag{42}$$

Prema tome ubuduće, čim dobijemo oblik diferencijalne jednadžbe (37), možemo kao rješenje pisati (42).

4.3 Prisilni harmonijski oscilator

Diferencijalna jednadžba, koja opisuje gibanje prisilnog harmonijskog oscilatora pogonjenog nekom vanjskom oscilirajućom silom $F_0\cos(\omega t)$,

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -2\delta\frac{dx(t)}{dt} - \omega_0^2x(t) + F_0\cos(\omega t)} \tag{43}$$

obična je nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda (20)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\delta\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2x(t) = F_0\cos(\omega t) \tag{44}$$

čije je opće rješenje (21). Njoj je pridružena homogena diferencijalna jednadžba (37) pa prema (42) uzimamo

$$x_{\mathrm{H}}(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega' t + \varphi) \ . \tag{45}$$

rješenje . Usporedbom nehomogenog člana $F_0 \cos(\omega t)$ i (22) zaključujemo: $\alpha = 0, \beta = \omega, P_n(t) = F_0, Q_m(t) = 0 \Rightarrow n, m, k, s = 0$ pa partikularno rješenje pretpostavljamo u obliku

$$x_\mathrm{P}(t) = C_\mathrm{T} \cos(\omega t) + C_\mathrm{R} \sin(\omega t) \tag{46}$$

odnosno, analogno prethodim rješenjima, možemo ga pisati u obliku

$$x_\mathrm{P}(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \tag{47}$$

te uvrštavanjem u početnu diferencijalu jednadžbu zaključiti

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \quad A_0 = \frac{F_0}{\mathrm{masa}} \tag{48}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg} \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{49}$$

Amplituda oscilacija u $x_\mathrm{H}(t)$ eksponencijalno opada pa nakon dovoljno dugo vremena možemo zanemariti taj član u općem rješenju $x(t) = x_\mathrm{H}(t) + x_\mathrm{P}(t)$ i pisati

$$\boxed{x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)}\,. \tag{50}$$

Prema tome ubuduće, čim dobijemo oblik diferencijalne jednadžbe (43), te nakon dovoljno velikog t, možemo kao rješenje pisati (50).